ANEXO 10

LAS CÓNICAS TERRITORIALES

1. LAS ELIPSES TERRITORIALES

1.1. INTRODUCCIÓN

Podemos definir la "elipse territorial" como el lugar geográfico de los puntos del territorio tales que la suma de sus distancias (medidas en línea recta sobre el mapa) a los puntos fijos o "focos territoriales" F y F' es constante. En este caso, la capitalidad territorial o centro territorial de masas, puede considerarse situado en el punto **O** (centro de la elipse o intersección de sus ejes mayor y menor. Analíticamente, puede hallarse por resolución del sistema de ecuaciones resultante de igualar a cero las primeras derivadas parciales con respecto a **x** y a **y**).

Si, por el contrario, consideramos las capitalidades o centros de masas de dos territorios distintos situados en los focos de la elipse, se obtendrá la "elipse inter-territorial", definida por ambos, una vez fijada la excentricidad de la misma en base a los criterios que veremos posteriormente o a cualesquiera otros que resulten justificados. Éste será, básicamente, el concepto de mayor utilidad en el Análisis Territorial que propugnamos (FRANQUET, 1990/91).

Efectivamente, el concepto de "elipse inter-territorial" así expresado refuerza la importancia atractiva de los ejes geográficos, infraestructurales o administrativos que unen entre sí las diversas capitalidades territoriales, frente a los propios "núcleos o polos" territoriales a los que nos venimos refiriendo hasta ahora. Por esta razón, la anchura de la franja del territorio afectado es máxima en el punto medio de la distancia focal (semieje menor de la elipse), mientras que el eje mayor contendrá al "punto frontera" donde se igualan o compensan las acciones gravitacionales procedentes de ambos focos F y F'.

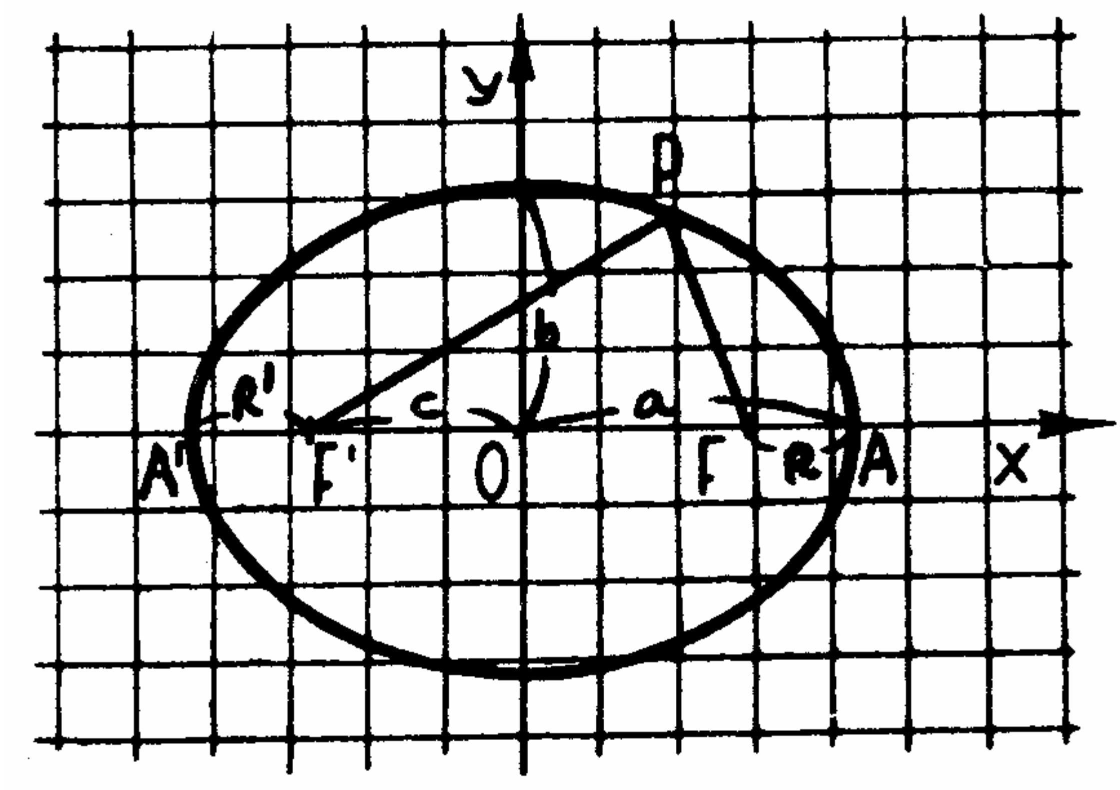

Fig. A-10.1. Elipse territorial.

Las longitudes de los segmentos $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$, determinados por cada punto del territorio (perteneciente a la elipse) y los focos o capitalidades, se denominarán "radios vectores territoriales" del punto, cuya suma designaremos por **2a**, o sea:

$$F'P + FP = 2a \quad (1)$$

Supongamos, ahora, que el eje OX pasa por los focos y que el origen de coordenadas se halla en el punto medio de la distancia que los separa. La medida del segmento $\overline{FF'}$, en valor absoluto, será la distancia focal de la elipse inter-territorial, y se designa por **2c**. A su inversa, utilizando un símil óptico, podría denominársele "potencia territorial":

$$P = 1 / 2c$$

que, en el esquema gravitatorio que venimos empleando, será tanto mayor cuanto menor sea la distancia rectilínea que separe ambos núcleos o polos territoriales (FRANQUET, 1990/91).

Desde luego, $a, c \in [R^+]$.

En el triángulo $\widehat{F'PF}$ será: $F'F < F'P + PF$, o sea: $2c < 2a$, y: $c < a$. A la diferencia: $a^2 - c^2$, se la representa por b^2 (2), y la "excentricidad" de la elipse vendrá dada por el cociente:

$$e = (c / a) < 1 . \quad (3)$$

1.2. LOS RADIOS VECTORES TERRITORIALES

En el sistema de tal suerte definido, los focos F y F' tienen de coordenadas (± c,0). Un punto cualquiera del territorio, perteneciente a la elipse, tendrá de coordenadas genéricas (x,y). Pues bien, calculando los valores de F'P y FP, y substituyendo en la fórmula (1), se tiene:

$$F'P + FP = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (4)$$

Aislando el primer radical y elevando al cuadrado, se obtiene:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4 a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4 a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

o sea, reduciendo términos:

$$2 c x = 4 a^2 - 2 c x - 4 a \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Trasponiendo términos y dividiendo por 4a:

$$(x - c)^2 + y^2 = (a - c/a . x)^2$$

esto es,

$$\mathbf{F P = a - e x = r} \quad (5)$$

Análogamente, aislando en la fórmula (4) el segundo radical, y repitiendo las mismas operaciones, obtendremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + (c/a) \cdot x$$

o sea,

$$\mathbf{F'P = a + e x = r'} \quad (6)$$

Las fórmulas (5) y (6) *permiten obtener, fácilmente, las longitudes de los radios vectores territoriales.*

1.3. ECUACIÓN DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

De cualquiera de las fórmulas (5) ó (6) se puede obtener también la ecuación de la elipse. Tomando, por ejemplo, la anterior a la fórmula (5) y elevando al cuadrado, deducimos:

$$x^2 - 2 c x + c^2 + y^2 = a^2 - 2 c x + (c^2/a^2) \cdot x^2$$

Trasponiendo y sacando factores comunes, queda:

$$x^2\,[1 - (c^2/a^2)] + y^2 = a^2 - c^2$$

o sea:

$$x^2\,\frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad ;$$

$$x^2 \cdot (b^2/a^2) + y^2 = b^2$$

De donde, dividiendo por b^2:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (7)$$

que es la *ecuación canónica* de las elipses territoriales.

1.4. VÉRTICES DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

Son los puntos en que los ejes cortan a la expresada curva cónica.

Si en la fórmula (7) hacemos $x = 0$, sale: $y = \pm b$. Haciendo $y = 0$, se obtiene $x = \pm a$. Luego en el eje OY hay dos vértices: los puntos B (0, b) y B' (0, -b); y en el eje OX hay otros dos: los puntos A (a,0) y A' (-a,0).

El segmento A'A, que es igual a $2 \cdot a$, se llama *eje mayor* de la elipse; y el segmento B'B, igual a 2b, se denomina *eje menor* de la elipse inter-territorial.

Fácilmente se ve en la figura que BF + BF' = 2a, y por tanto BF = BF' = a, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BOF, sale la misma relación (2):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

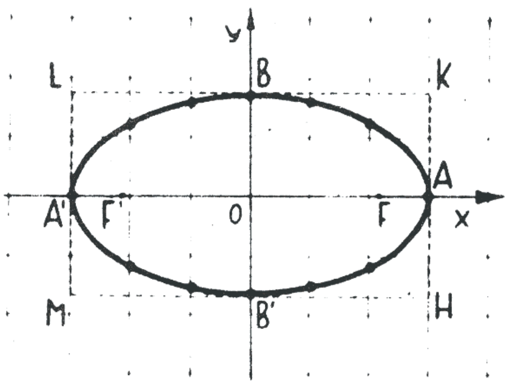

Fig. A-10.2. Vértices de una elipse inter-territorial.

1.5. INTERVALOS DE EXISTENCIA

Resolviendo la fórmula (7), primero respecto a **y**, se obtiene:

$$y^2 / b^2 = 1 - (x^2 / a^2) = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad ; \; y / b = \frac{+\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad ,$$

o sea:

$$y = + (b / a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (8)$$

Para que el valor de **y** sea real, es necesario que:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad ; \text{ o sea } \quad x^2 - a^2 \leq 0$$

Esta inecuación también puede escribirse también así:

$$(x - a) \cdot (x + a) \leq 0$$

y se satisface por los valores de **x** tales que:

$$- a \leq x \leq a \quad , \text{ o sea: } \quad x \in [-a, a] \quad ,$$

que nos dice que **x** no puede recibir valores absolutos mayores que **a.**

Despejando **x** en la fórmula (7), se deduce del mismo modo que:

$$x = + (a / b) \cdot \sqrt{b^2 - y^2} \qquad (8')$$

de dónde,

$$- b \leq y \leq b \quad , \text{ o sea: } \quad y \in [-b, b]$$

que nos dice que **y** no puede tomar valores absolutos mayores que **b.** Luego si se construye el rectángulo **H K L M** (ver fig. A-10.2), con **O** como centro y de lados 2a y 2b, la elipse quedará completamente comprendida dentro del mismo. Los intervalos de existencia son (-a, a) para la **x** y (-b,b) para la **y,** ya que se verifica que:

$$\begin{cases} - a \leq x \leq a \\ - b \leq y \leq b \end{cases}$$

1.6. TANGENTE A LA ELIPSE TERRITORIAL EN UNO DE SUS PUNTOS

Sea la elipse territorial o inter-territorial de ecuación canónica:

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \quad (9)$$

de la que queremos trazar la tangente en uno de sus puntos de coordenadas $P(x_1, y_1)$, que puede ser un punto cualquiera del territorio.

Derivando en la expresión anterior (9) se obtiene:

$$2x / a^2 + 2yy' / b^2 = 0$$

esto es:

$$y' = \frac{-x \cdot b^2}{y \cdot a^2} \quad ; y_1' = -\frac{b^2 \cdot x_1}{a^2 \cdot y_1} \quad .$$

La tangente será:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 \cdot x_1}{a^2 \cdot y_1} (x - x_1)$$

y transponiendo el factor b^2 y el divisor y_1:

$$\frac{y_1 \cdot y - y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1 \cdot x - x_1^2}{a^2}$$

o sea:

$$x_1 \cdot x / a^2 + y_1 \cdot y / b^2 = x_1^2 / a^2 + y_1^2 / b^2 = 1$$

ya que el punto de coordenadas geográficas UTM (x_1, y_1) pertenece a la elipse territorial o inter-territorial.

La tangente, es pues:

$$\mathbf{x_1 \cdot x / a^2 + y_1 \cdot y / b^2 = 1} \quad (10)$$

cumpliéndose la misma regla formal que para la circunferencia.

Propiedad de la tangente: "*La tangente en un punto de la elipse territorial es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector territorial y la prolongación del otro"* (fig. A-10.3).

En efecto, la intersección T de la tangente en un punto P(x_1, y_1) con el eje de las x se obtiene haciendo y = 0 en la ecuación (10), con lo cual resulta:

$$x_1 \cdot x / a^2 = 1 \; ; \quad \text{de donde:} \quad x = a^2 / x_1$$

Sus distancias a los focos o capitalidades territoriales, son:

$$\overline{TF} = (a^2 / x_1) - c \qquad \overline{TF'} = (a^2 / x_1) + c$$

Dividiendo, resulta:

$$\frac{\overline{TF}}{\overline{TF'}} = \frac{a^2 - c \cdot x_1}{a^2 + c \cdot x_1} = \frac{a - e \cdot x_1}{a + e \cdot x_1} = \frac{r}{r'}$$

Al respecto de lo expuesto hasta aquí, puede verse la figura siguiente:

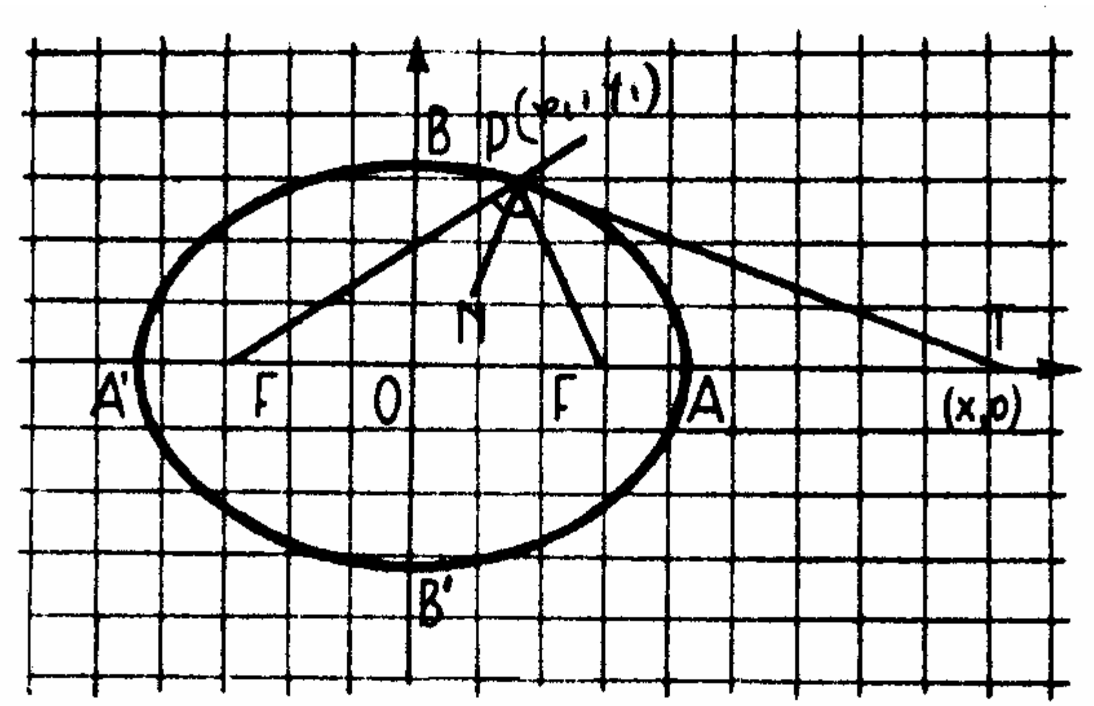

Fig. A-10.3. Tangente a la elipse territorial en un enclave.

Es decir, las distancias $\overline{TF}$ y $\overline{TF'}$ son proporcionales a los lados del triángulo PFF': por lo tanto, la tangente coincide con la bisectriz exterior, y puede tratarse de un eje territorial cualquiera.

La *normal* PN, por ser perpendicular a la tangente en el punto P, coincidirá con la bisectriz interior, o sea con la bisectriz del ángulo formado por los dos radios vectores territoriales.

1.7. OTRAS FORMAS TÍPICAS DE LA ECUACIÓN DE LAS ELIPSES INTERTERRITORIALES

La ecuación (7) expresa una propiedad geométrica característica de la elipse territorial, independientemente de su posición respecto de los ejes coordenados. Dada una elipse territorial de centro de simetría O, focos F y F' y ejes A'A y B'B (figura A-10.4) tracemos desde P una perpendicular PH al eje focal. En virtud de la fórmula (7) se tiene que:

$$\overline{OH}^2 / \overline{OA}^2 + \overline{PH}^2 / \overline{OB}^2 = 1 \quad (11)$$

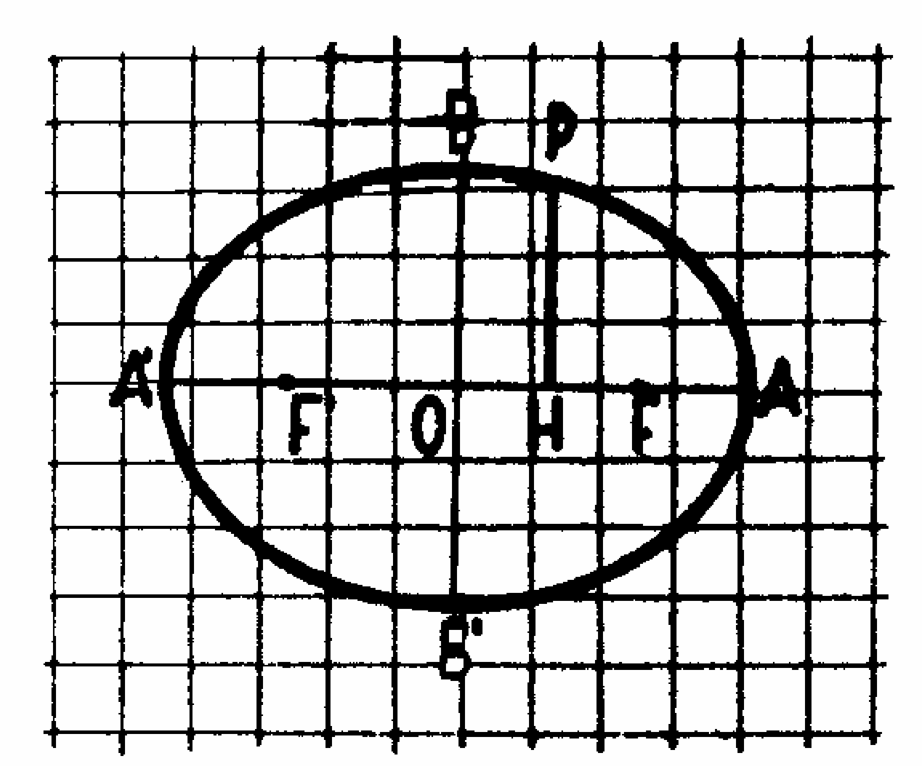

Fig. A-10.4. Propiedades de las elipses territoriales (I).

ecuación que se puede expresar así:

El cuadrado de la distancia de un punto de la elipse territorial al eje menor partido por el cuadrado del semieje focal, más el cuadrado de la distancia del mismo punto del territorio al eje focal, partido por el cuadrado del semieje no focal, es igual a 1.

La fórmula (11) permite deducir fácilmente que (FRANQUET, 1990/91):

La ecuación de una elipse territorial con centro en (α, β) *es, si el eje mayor es paralelo al eje OX (fig. A-10.5):*

$$(x - \alpha)^2 / a^2 + (y - \beta)^2 / b^2 = 1 \quad ; \quad (a > b) \quad (12)$$

Al respecto de lo expuesto hasta aquí, pueden verse las figuras siguientes:

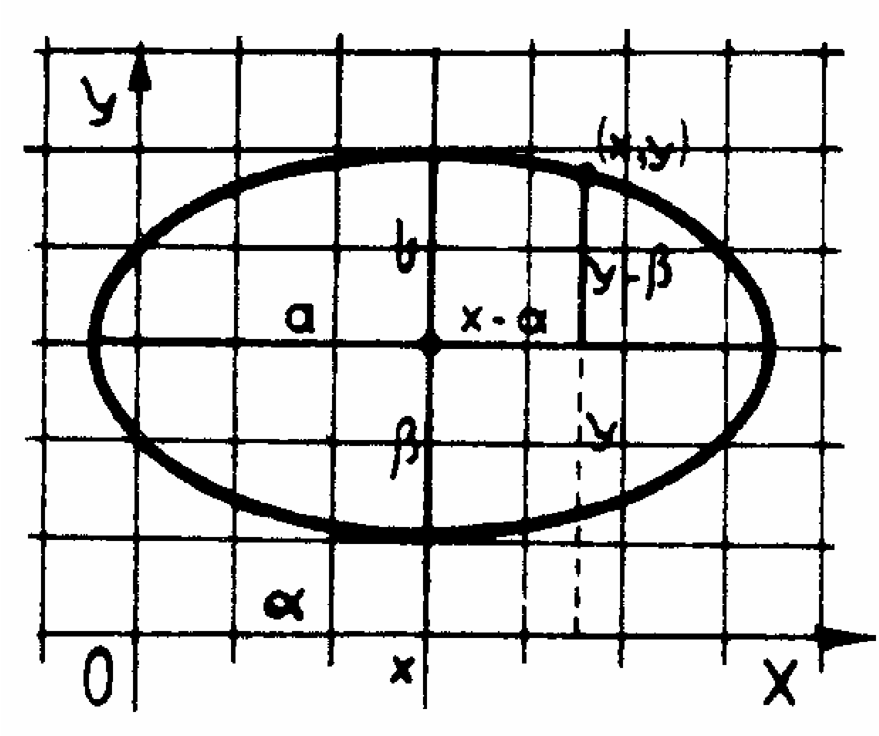

Fig. A-10.5. Propiedades de las elipses territoriales (II).

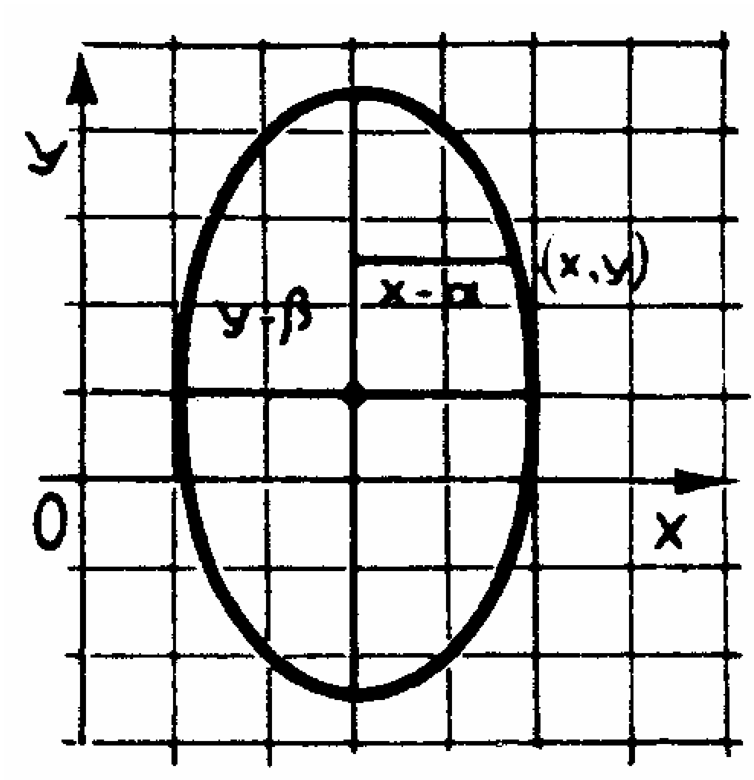

Fig. A-10.6. Propiedades de las elipses territoriales (III).

y si el eje mayor es paralelo al eje O Y (fig. A-10.6) resultará que:

$$(y - \beta)^2 / a^2 + (x - \alpha)^2 / b^2 = 1 \quad (a > b) \quad (13)$$

Veamos, por último, que dada una ecuación de la forma:

$$\mathbf{A\, x^2 + C\, y^2 + D\, x + E\, y + F = 0,}$$

donde A y C tienen el mismo signo, es fácil que completando los cuadrados en x e y, la ecuación puede, en general, reducirse a una de las formas típicas del número anterior. Pero hay dos excepciones: cuando el primer miembro puede ponerse en forma de suma de dos cuadrados y al mismo tiempo el segundo miembro es nulo o negativo. En el primer caso el lugar es evidentemente el punto de coordenadas (α, β), llamado "punto elipse"; en el segundo caso, no existe gráfica. Luego podemos expresar que:

Una ecuación de segundo grado en la cual falta el término rectangular en xy, y los coeficientes de x^2 e y^2 tienen el mismo signo, representa una elipse con los ejes paralelos a los ejes coordenados (excepcionalmente un solo punto o no existe gráfica).

Pues bien, a la ecuación anterior se la conocerá como la "ecuación general de las elipses territoriales".

1.8. APLICACIÓN AL ANÁLISIS TERRITORIAL

El problema que se presentará, en la práctica del Análisis Territorial, consistirá normalmente en hallar la ecuación de la elipse inter-territorial cuyos focos sean las capitalidades o centros de masas de renta de ambos territorios, y cuya excentricidad venga predeterminada por el hecho de que:

$$a = c + R\ (R')\ ,$$

siendo R (R') el mayor (menor) de los "radios óptimos de acción territorial" de los territorios[1] T y T', denominándosele **elipse inter-territorial mayor (menor).** También podría considerarse, a este respecto, la "elipse inter-territorial media", en que:

$$\overline{R} = \frac{R + R'}{2}$$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las elipses interregionales en que las coordenadas geográficas de sus respectivas capitalidades o sedes administrativas son: F'(-1,4) y F(7,4), siendo los correspondientes radios óptimos de acción territorial:

$$\begin{cases} R' = 3'0 \text{ Mm.} = 30'0 \text{ Km.} \\ R = 8'0 \text{ Mm.} = 80'0 \text{ Km.} \end{cases}$$

a) Desde luego, la elipse mayor tendrá una excentricidad de:

$$a = c + R = 4'0 + 8'0 = 12'0 \text{ Mm.} \quad ;$$

$$e = c/a = 4'0/12'0 = 1/3 \quad ;$$

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) = 12^2\ (1 - 1/9) = 128 \quad ; \quad b = \sqrt{128} = 11'3 \text{ Mm.}$$

con lo que su configuración planimétrica resulta sensiblemente circular.

La ecuación canónica de la elipse interregional de centro (3,4), será, pues:

$$\frac{(x-3)^2}{144} + \frac{(y-4)^2}{128} = 1 \quad ,$$

[1] *Vide* la obra del doctorando ANÁLISIS TERRITORIAL (División, Organización y Gestión del territorio). Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, 1991, p. 246 y ss.

que después de reducir, ofrece la ecuación general:

$$8x^2 + 9y^2 - 48x - 72y - 936 = 0.$$

Para comprobar que, efectivamente, se trata de una elipse, veamos su discriminante o invariante proyectivo (cúbico):

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -24 \\ 0 & 9 & -36 \\ -24 & -36 & -936 \end{vmatrix} = -67.392 - 5.184 - 10.368 = -82.944 \neq 0 ,$$

luego es una cónica no degenerada.

El invariante afín o cuadrático, será:

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 72 > 0$$

, luego es del género elipse.

$$a_{11} \cdot |A| = 8 \cdot (-82.944) = -663.552 < 0 ,$$

luego se trata de una elipse real.

El invariante métrico o lineal, será:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 8 + 9 = 17.$$

De hecho, dichos invariantes son expresiones que ligan entre sí a los distintos coeficientes, pero que se conservan en las nuevas expresiones de la curva territorial. Si ahora efectuamos una traslación y un giro de los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares, podremos calcular la "ecuación reducida" de la elipse inter-territorial que nos ocupa. En efecto, a partir de la expresión:

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + I_3 / I_2 = 0 ,$$

siendo S_1 y S_2 las soluciones o raíces de la ecuación:

$$S^2 - I_1 \cdot S + I_2 = 0 \quad \text{, con lo que:}$$

$$S^2 - 17 \cdot S + 72 = 0 \quad \text{; esto es:}$$

$$S = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 288}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 = S_1 \\ 8 = S_2 \end{array} \right. .$$

O sea: $9x^2 + 8y^2 - 82.944 / 72 =$ $\mathbf{9x^2 + 8y^2 - 1.152 = 0}$.

Por último, los cortes o intersecciones con los ejes coordenados serán los puntos o enclaves del territorio tales que:

$$x = 0 \quad , \quad 9y^2 - 72y - 936 = 0 \quad ;$$

$$y = \frac{72 \pm \sqrt{5.184 + 33.696}}{18} = \left\langle \begin{array}{l} 14'95 \text{ Mm.} \\ -6'95 \text{ Mm.} \end{array} \right. \quad .$$

$$y = 0 \quad , \quad 8x^2 - 48x - 936 = 0 \quad ;$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2.304 - 29.952}}{16} = \left\langle \begin{array}{l} 14'22 \text{ Mm.} \\ -8'22 \text{ Mm.} \end{array} \right. \quad .$$

Veamos, en fin, que el área encerrada por dicha elipse vendrá dada por:

$$A = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 12'0 \cdot 11'3 = 426'00 \text{ Mm}^2 = 42.600 \text{ Km}^2.$$

Obsérvese que dicha área sería equivalente a la de un cierto "rectángulo interregional mayor" cuya base fuera: $2 \cdot a = 2 \cdot 12'0 = 24'0$ Mm. = 240’0 Km., siendo su altura:

$$h = A / 2a = 426'00 / 24'00 = 17'75 \text{ Mm.} = 177'5 \text{ Km.}$$

b) Por el contrario, y siguiendo la misma sistemática, veamos que la elipse interregional menor tendrá una excentricidad de:

$$a' = c + R' = 4'0 + 3'0 = 7'0 \text{ Mm.}$$

$$e' = c/a' = 4/7 \quad ;$$

$$b'^2 = a'^2 (1 - e'^2) = 7^2 (1 - 16/49) = 33 \quad ;$$

$$b' = \sqrt{33} = 5'7 \text{ Mm.} \quad ,$$

y su ecuación canónica vendrá dada por:

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{33} = 1 \quad ,$$

que, una vez reducida, ofrece la ecuación general:

$$33x^2 + 49y^2 - 198x - 392y - 536 = 0 ,$$

en la que no figuran términos rectangulares.

Se trata también, efectivamente, de una elipse, puesto que su discriminante o invariante proyectivo (cúbico) es:

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 33 & 0 & -99 \\ 0 & 49 & -196 \\ -99 & -196 & -536 \end{vmatrix} \begin{matrix} = -866.712 - 480.249 - 1.267.728 = \\ = -2.614.689 \neq 0 \end{matrix}$$

luego es una cónica no degenerada.

El invariante afín o cuadrático, será:

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 49 \end{vmatrix} = 1.617 > 0$$

, luego es del género elipse.

$$a_{11} \cdot |A| = 33 \cdot (-2.614.689) = -86.284.737 < 0 ,$$

luego se trata de una elipse real.

El invariante métrico o lineal, será:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 33 + 49 = 82 .$$

De este modo, la "ecuación reducida" de la elipse inter-territorial, será la siguiente:

$$S^2 - 82 \cdot S + 1.617 = 0 ;$$

$$S = \frac{82 \pm \sqrt{6.724 + 6.468}}{2} = \left\langle \frac{49 = S_1}{33 = S_2} \right.$$

O sea: $49x^2 + 33y^2 - 2.614.689 / 1.617 =$ $\mathbf{49x^2 + 33y^2 - 1.617 = 0}$ (*)

En este caso, el área encerrada por dicha curva plana, que es la superficie elíptica interregional menor, será:

$$A' = \pi \cdot a' \cdot b' = \pi \cdot 7'0 \cdot 5'7 = 125'35 \text{ Mm}^2 = 12.535 \text{ Km}^2 ,$$

que supone sólo un: (12.535/42.600) x 100 = 29'4% de la superficie de la elipse mayor anteriormente calculada.

En este caso, también, se tendría un cierto "rectángulo interregional menor equivalente" cuya base sería: 2·a' = 2 · 7'0 = 14'0 Mm = 140'0 Km, y su altura:

h' = A' / 2a' = 125'35 / 14'00 = 8'95 Mm. = 89'5 Km.

1.9. RESTANTES ESPECIFICACIONES

a) Un problema típico que se puede presentar en el Análisis Territorial aplicado consiste, precisamente, en la construcción gráfica o trazado, sobre el mapa, de una elipse inter-territorial, conociendo la situación de los focos o centros territoriales así como sus radios óptimos de acción territorial (FRANQUET, 1990/91).

En consecuencia, de acuerdo con la exposición anterior, conocemos la situación geográfica de los puntos o vértices de la elipse A y A'. Para hallar más puntos de esta curva cerrada y plana, basta tomar un punto **Q** cualquiera en el segmento finito $\overline{AA'}$ (que pudiera ser, v. gr., el "punto frontera" existente entre ambos territorios de capitalidades F y F', donde se compensan las fuerzas de atracción ejercidas desde ambos), y haciendo centro en cada foco, se trazan dos circunferencias con radios respectivos $\overline{QA}$ y $\overline{QA'}$, las cuales se cortan en puntos del territorio pertenecientes a la curva. De este modo, a cada posición del punto **Q** corresponden cuatro de la elipse, repitiéndose la operación descrita tantas veces como haga falta al objeto de facilitar el trazado gráfico que se busca, con el auxilio de una plantilla de curvas o "plotter" adecuado.

a-1) De más sencilla construcción que la elipse sería el "óvalo territorial", cuya configuración y propiedades son sólo asimilables a los de dicha cónica territorial. Puede verse, al respecto, la siguiente figura:

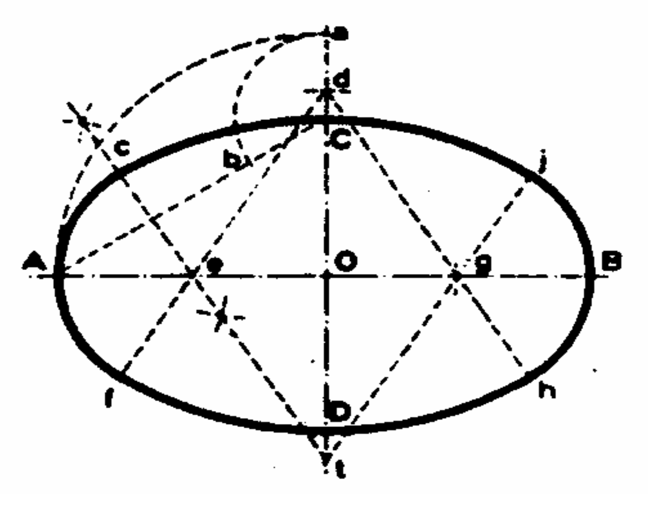

Fig. A-10.7. Óvalo territorial (I).

En este caso, los focos territoriales serían los puntos **e** y **g**. Con centro en ellos y radios territoriales óptimos eA y gB, se trazan los arcos $\widehat{fc}$ y $\widehat{hj}$, y haciendo centros en t y d con radios tC y dD, se trazarán los arcos $\widehat{cj}$ y $\widehat{fh}$, quedando resuelto el problema planteado. Otras construcciones de "óvalos territoriales" podrían ser las siguientes:

a-2) Dados los dos ejes territoriales: uniendo los extremos de los ejes formaremos un rombo ADBC. Con centro en O se describirá el arco CT que nos dará TB como semidiferencia de ejes. Sobre un lado del rombo, tomaremos EC = TB, y los puntos M y N en que la mediatriz de AE corta a los ejes son los centros del óvalo territorial propuesto. Tomando, por último, OR = ON y OS = OM tendremos los otros dos centros. Así:

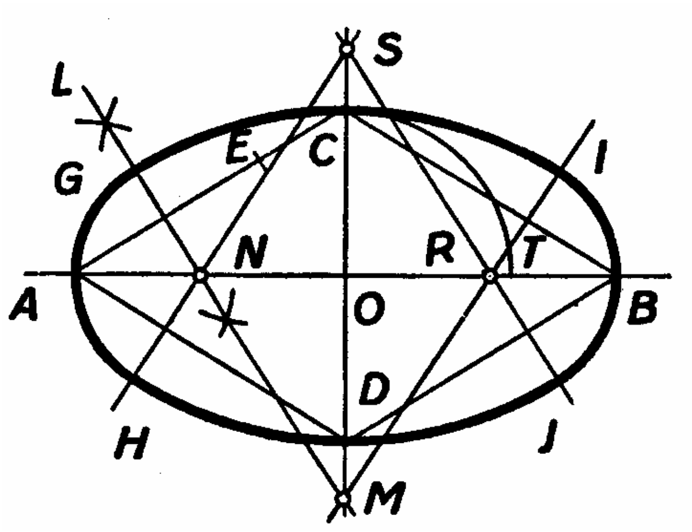

Fig. A-10.8. Óvalo territorial (II).

a-3) Dados los dos ejes territoriales: sean los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. A partir de los cuatro extremos de los mismos tomaremos una distancia cualquiera, menor que el semieje menor, obteniendo así los puntos o lugares geográficos E, F, G, H, siendo F y G dos centros de la línea; el punto T en que la mediatriz de $\overline{EF}$ corta al eje vertical será otro centro. De la misma manera, obtendríamos el cuarto centro S. A saber:

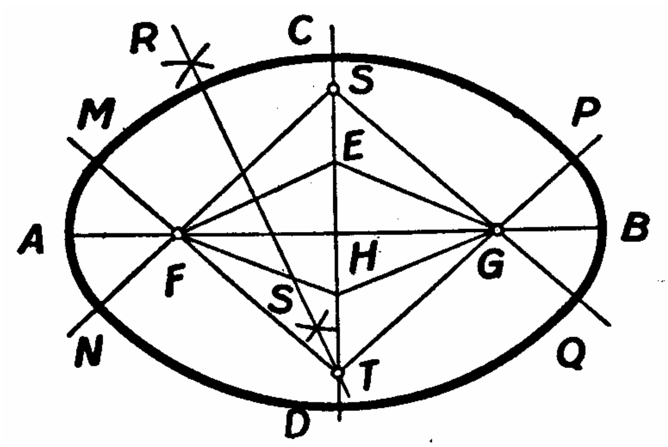

Fig. A-10.9. Óvalo territorial (III).

a-4) Dado el eje mayor: dividiremos el eje mayor en tres partes iguales $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$. Haciendo centro en M y N describiremos dos circunferencias de radio igual a una de estas partes iguales. Los puntos de concurso R y S de las dos circunferencias son centros que unidos con M y N ofrecen las líneas de separación y las longitudes de los radios. Así:

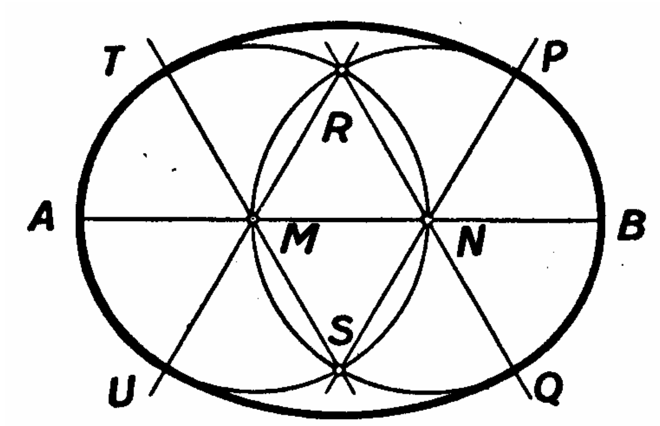

Fig. A-10.10. Óvalo territorial (IV).

a-5) Dado el eje mayor: se trata de una construcción gráfica parecida a la expuesta en el problema anterior, pero dividiendo en cuatro partes iguales al eje territorial mayor, en lugar de hacerlo en tres, con lo que: $\overline{RA} = \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{BS}$. Entonces, los puntos A, B, G y H serán los centros de los arcos que forman el óvalo territorial. Así:

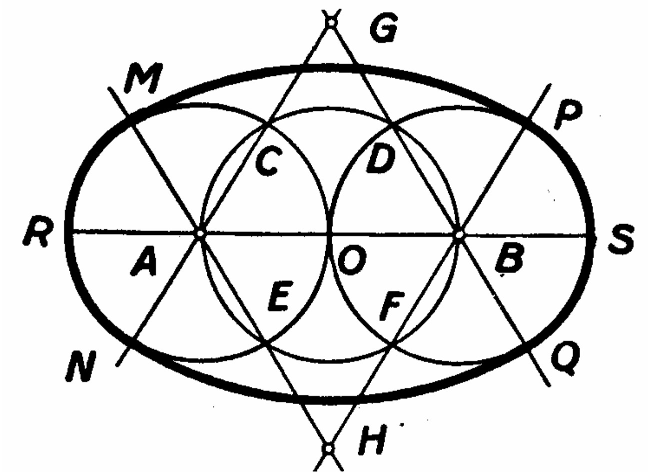

Fig. A-10.11. Óvalo territorial (V).

b) Enlazando con nuestra expuesta teoría de los momentos territoriales[2], veamos que con respecto al eje OX (eje mayor), el momento territorial de inercia de la elipse inter-territorial, viene dada por:

$$I_X = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} \quad ,$$

con un módulo resistente territorial de:

$$W_X = I_X / v = \frac{\pi \cdot\cdot\ a \cdot b^3\ /\ 4}{b} = \frac{\pi \cdot a \cdot b^2}{4} \quad .$$

Del mismo modo, con respecto al eje OY (eje menor), se tendrán:

$$I_y = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} \quad ,$$

$$W_y = I_y / v = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3\ /\ 4}{a} = \frac{\pi \cdot b \cdot a^2}{4} \quad .$$

Por último, con respecto al centro O de la elipse, se tendrá:

[2] *Vide* la obra del doctorando ANÁLISIS TERRITORIAL (División, Organización y Gestión del territorio). Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, 1991, p. 276 y ss.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} + \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4}(a^2 + b^2) \quad , \text{ y :}$$

$$W_0 = I_0 / v = \frac{\pi \cdot b}{4}(a^2 + b^2) \quad .$$

c) 1. Llamaremos "círculos focales o directores" de un territorio a los trazados con la magnitud **2a** (eje mayor) como radio y los focos territoriales conocidos F y F' como centros. Obviamente, la ecuación del círculo director del foco F' es:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \ .$$

La ecuación del círculo director del foco F es:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 \ .$$

2. Llamaremos "círculos principales u homográficos" del territorio a los trazados tomando el centro de la elipse como centro de la circunferencia que los delimita, y los ejes como diámetros. De este modo, sus ecuaciones vendrán dadas por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & , \text{ y :} \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

3. Veamos, en fin, que, en forma paramétrica, la ecuación de las elipses territoriales será:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

siendo φ un ángulo tal que: $\cos \varphi = x / a$.

Así mismo, en coordenadas polares, y tomando como polo un foco territorial y como eje polar el propio eje focal, la ecuación es:

$$\rho\,(1 + c/a \cdot \cos \omega) = b^2 / a \quad ,$$

Llamando "parámetro" a la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por un foco territorial, de valor:

$$p = b^2 / a \quad \text{(semiparámetro)} \quad ,$$

podremos escribir la anterior ecuación del siguiente modo:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \omega} \quad ,$$

poniendo el módulo en función del semiparámetro, de la excentricidad y del argumento.

2. LAS RESTANTES CÓNICAS TERRITORIALES

2.1. LA HIPÉRBOLA INTER-TERRITORIAL

Definiríamos la "hipérbola inter-territorial" como el lugar geográfico de los puntos del territorio tales que la diferencia de sus distancias (medidas en línea recta sobre el mapa) a los puntos fijos o "focos territoriales" F y F' es constante. Esto es:

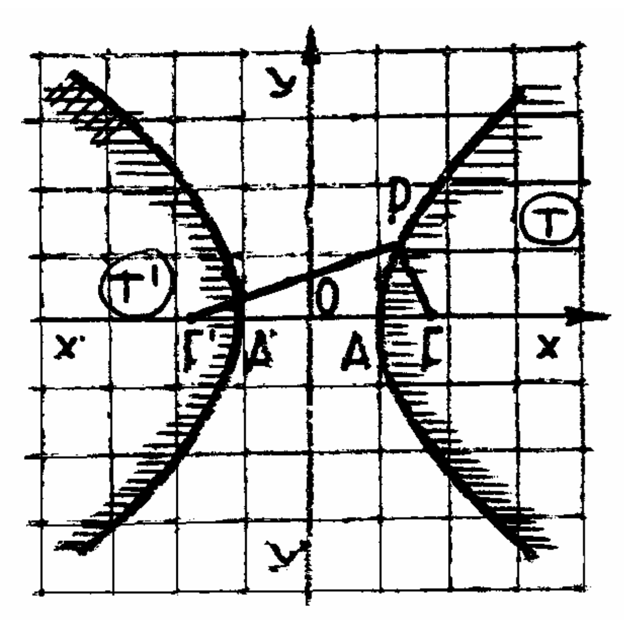

Fig. A-10.12. Hipérbola territorial.

Obsérvese que, en definitiva, la hipérbola inter-territorial más bien nos separa y delimita las zonas de influencia de los territorios T' y T (de capitalidades respectivas F' y F), de tal modo que la porción del territorio indefinida o intermedia entre ambos es de anchura mínima en el punto medio de la distancia focal FF'.

Sería posible, por otra parte, desarrollar con mayor extensión y profundidad el concepto y aplicaciones que aporta esta nueva cónica territorial, al igual que lo hemos hecho en el caso anterior de las elipses territoriales.

2.2. LA PARÁBOLA TERRITORIAL

Definiremos, por último, la "parábola territorial" (FRANQUET, 1990/91) como el lugar geográfico de los puntos del territorio que equidistan de un punto fijo o foco territorial F y de un eje o recta fija llamada "directriz territorial". Esto es:

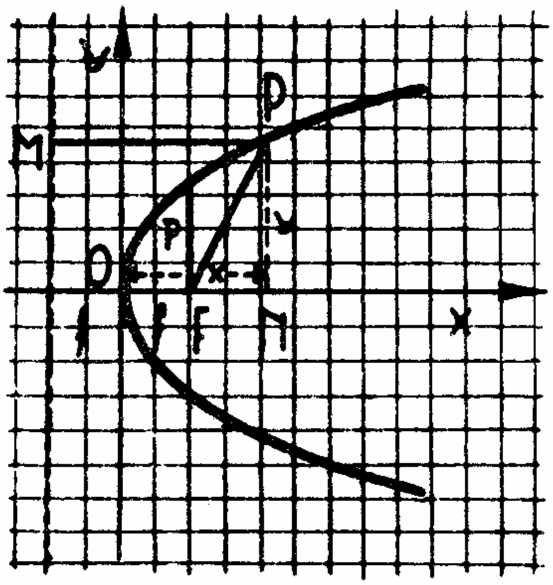

Fig. A-10.13. Parábola territorial.

La recta trazada por el foco perpendicular o la directriz se llama *eje* de la parábola. El punto en que el eje corta la curva, esto es, el punto medio entre el foco y la directriz, se llama *vértice* de la parábola. La distancia del vértice al foco la designaremos por f, o *distancia focal,* por analogía con los espejos curvos.

Tomemos el vértice de la parábola como origen de coordenadas, y el eje de la curva como eje OX: el foco es el punto F (f, o) y la directriz es la recta x = -f. Si P (x, y) es un punto cualquiera de la curva territorial, por definición de parábola se tendrá (ver fig. A-10.13):

$$\overline{FP} = \overline{MP}$$

y elevando al cuadrado:

$$\overline{FP}^2 = \overline{MP}^2$$

Es fácil ver que:

$$\overline{FP}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{NP}^2 = (x - f)^2 + y^2$$

Además:

$$MP^2 = (x + f)^2$$

Substituyendo sale la expresión:

$$(x - f)^2 + y^2 = (x + f)^2 ,$$

o bien reduciendo términos:

$$-2 f x + y^2 = 2 f x$$

y en definitiva:

$$\mathbf{y^2 = 4 \cdot f \cdot x}$$

De la ecuación anterior se deduce que **f** y **x** deben tener el mismo signo, ya que $\mathbf{y^2}$ siempre es positivo. Luego la curva es cóncava; dirige la concavidad hacia la derecha o bien hacia la izquierda, según que **f** sea positivo o negativo. Por cada valor de **x** existen dos valores de **y**, iguales en valor absoluto pero de signos opuestos, que crecen indefinidamente a medida que también lo hace **x**; luego la curva o cónica territorial en cuestión es abierta y se extiende hasta el infinito, y además es simétrica respecto al eje de abscisas OX.

Evidentemente, la recta directriz territorial puede ser un eje geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario, que, a su vez, sea interior, exterior o secante al territorio cuya capitalidad o centro de las masas socioeconómicas se sitúa en el foco F. Por lo que se refiere a una posible mayor profundización en estos conceptos, nos remitimos a lo señalado al respecto en el epígrafe anterior.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GRÁFICOS DE INTERÉS

3.1. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE NUEVOS CENTROS TERRITORIALES DE PRESTACIÓN DE SERVICIOS

El problema consistirá en dibujar dos circunferencias territoriales, de radio de acción conocido, que sean tangentes a otras dos circunferencias territoriales dadas, dejándolas al exterior (FRANQUET, 1990/91).

Para ello, se procederá del siguiente modo:

a) Se tienen dos circunferencias de centros de masas socioeconómicas A y B que delimitan sendos círculos de acción territorial, así como el radio que se desea de otros Entes territoriales cuya acción sea tangente o complementaria a la de los centros anteriormente reseñados.

b) Desde el centro de la primera circunferencia, A, se traza una recta hacia la izquierda. Lo mismo se realiza desde el centro de la segunda circunferencia, B, trazándose una recta hacia la derecha. Encontramos, entonces, los puntos C y D de las mismas. Desde C, siguiendo la recta anterior, se superpone el radio conocido l de las circunferencias que engloban los círculos de acción territorial buscados, hallando el punto E. Por último, al hacer lo mismo desde D hallaremos el punto del territorio F.

c) Con centro en A y radio AE, se traza una circunferencia. Con centro en B y radio BF, se traza otra circunferencia. Los puntos del territorio donde se cortan ambas circunferencias son G y H, que resultarán ser los centros de gravedad respectivos de los nuevos Entes territoriales que buscamos.

d) Se trazará, a continuación, una recta desde G hasta A, encontrándose el punto I de intersección con la circunferencia de acción territorial de centro en A. Del mismo modo operaremos trazando rectas desde G hasta B, y uniendo, así mismo, H con A y H con B. Como consecuencia de ello, encontraremos los restantes puntos del territorio J, K y L.

e) Con centro en G y radio: $\overline{GI} = \overline{GJ}$, se trazará una primera circunferencia resultado. Por último, con centro en H y radio de acción territorial $\overline{HK} = \overline{HL}$, se obtendrá la otra circunferencia resultado.

Véase, para una mejor comprensión de todo ello, la siguiente figura.

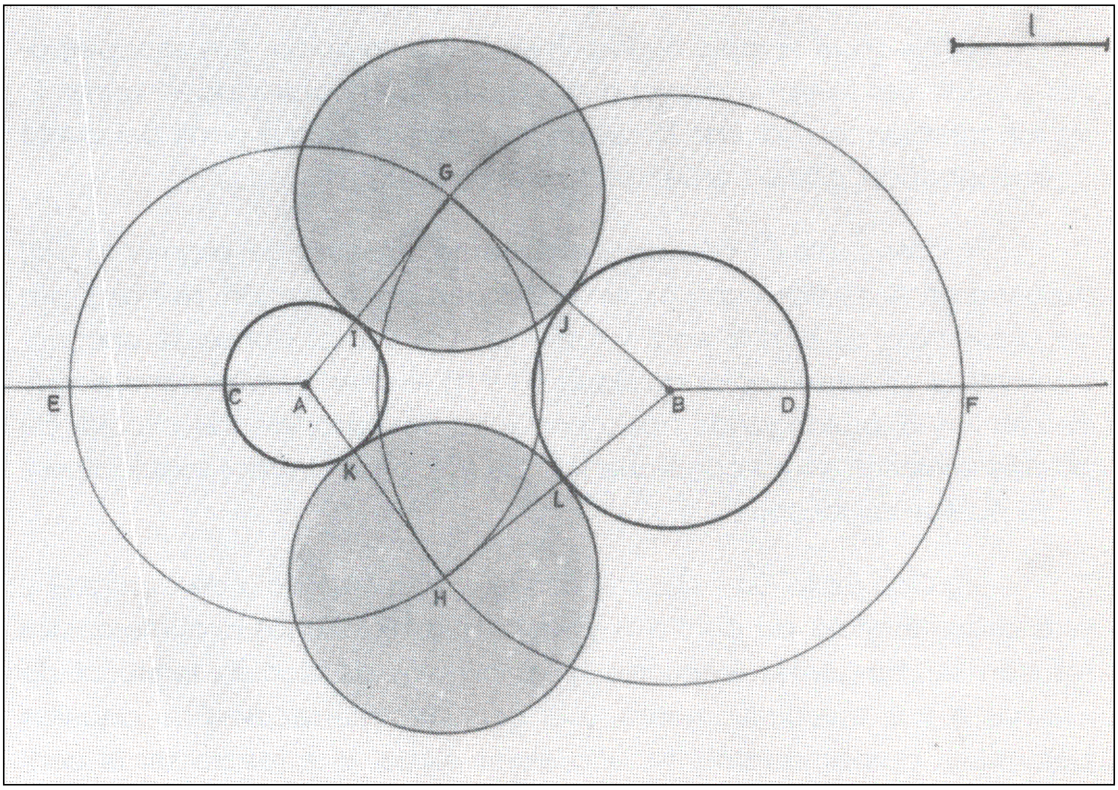

Fig. A-10.14. Nuevos círculos de acción territorial.

3.2. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

En este caso, el problema consistirá en dibujar dos circunferencias territoriales, de radio de acción conocido, que sean tangentes a otras dos circunferencias territoriales dadas, dejándolas al interior.

Para ello, se procederá del siguiente modo:

a) Se tienen dos circunferencias de centros de masas socioeconómicas A y B, que delimitan los círculos de acción territorial respectivos, así como el radio que se desea del Ente territorial mayor, que las engloba.

b) Se coge el radio de la primera circunferencia, A, y se superpone a partir del extremo derecho del radio, D, encontrando el punto E. Poner, también, el radio de la segunda circunferencia a partir del punto D, encontrando, como consecuencia, el otro punto F.

c) Con radio $\overline{CE}$ (siendo C el extremo izquierdo del segmento CD) y centro en A, se traza una circunferencia. A continuación, se traza otra circunferencia de centro en B y radio CF. Los puntos donde se encuentran ambas circunferencias auxiliares (G y H) se unen con los centros territoriales A y B, prolongando hasta cruzar los correspondientes círculos de acción territorial; como consecuencia de ello, encontramos seguidamente los puntos del territorio: I, J, K, L.

d) Con radio GJ = GL, se traza una circunferencia de centro G y otra circunferencia de centro H y radio $\overline{HI}$ = HK. Dichas circunferencias resultan ser tangentes exteriores a los círculos de acción territorial de centros A y B, respectivamente, y el conjunto intersección de aquellos determina, aproximadamente, una cierta elipse, que resulta ser el conjunto inter-territorial A-B que se pretende.

Véase, para una mejor comprensión de todo ello, la siguiente figura.

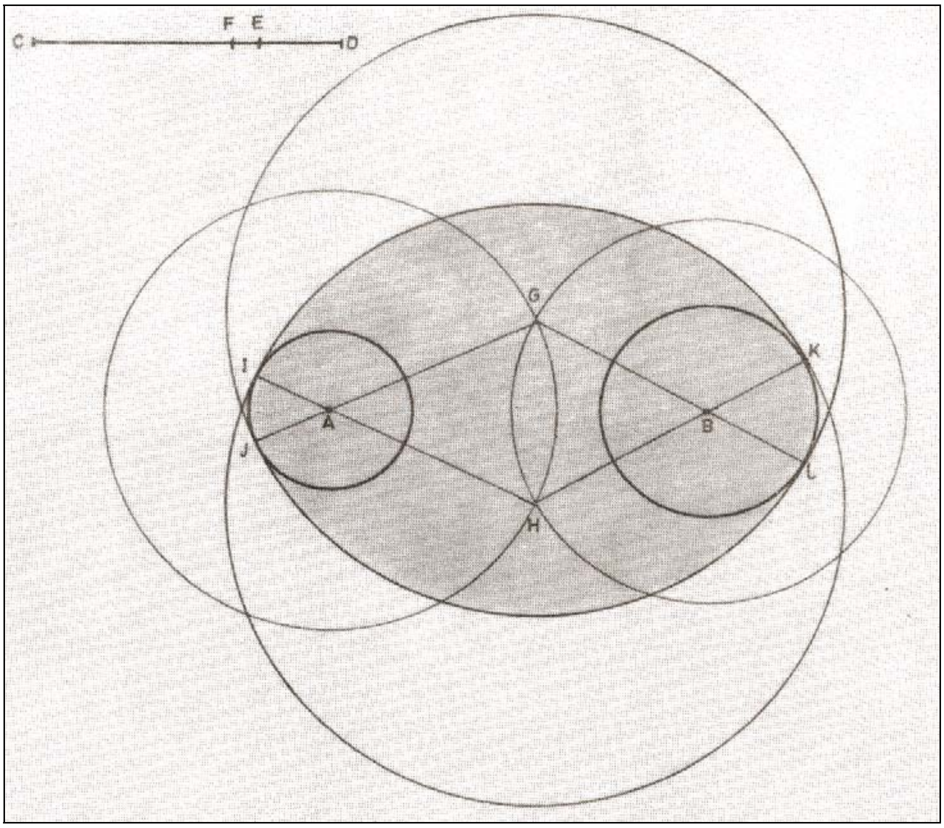

Fig. A-10.15. Delimitación geofísica de la elipse inter-territorial.

(*) Por cierto, aquí, las intersecciones con los ejes coordenados serán los puntos del territorio tales que:

$$x = 0 \quad , 49\,y^2 - 392\,y - 536 = 0 \quad ;$$

$$y = \frac{392 \pm \sqrt{153.664 + 105.056}}{98} = \left\langle \frac{9'19 \text{ Mm.}}{-1'19 \text{ Mm.}} \right.$$

$$y = 0 \quad , 33\,x^2 - 198\,x - 536 = 0 \quad ;$$

$$x = \frac{198 \pm \sqrt{39.204 + 70.752}}{66} = \left\langle \frac{8'02 \text{ Mm.}}{-2'02 \text{ Mm.}} \right.$$